

Výroková logika: Metoda sémantických stromů



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Logika: systémový rámec rozvoje oboru v ČR a koncepce logických propedeutik pro mezioborová studia (reg. č. CZ.1.07/2.2.00/28.0216, OPVK)

Základní sémantické otázky:

- Je φ tautologie?
- Je φ kontradikce?
- Je φ splnitelná?
- Je množina $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ splnitelná?
- Vyplývá ψ z $\varphi_1, \dots, \varphi_n$?
- Jsou φ, ψ logicky ekvivalentní?

Metoda protipříkladu: tautologie

- Je φ tautologie?

Metoda protipříkladu: Systematicky hledáme interpretaci, v níž je formule φ nepravdivá.

Metoda protipříkladu: vyplývání

- Vyplývá ψ z $\varphi_1, \dots, \varphi_n$?

Metoda protipříkladu: Systematicky hledáme interpretaci, v níž jsou formule $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ pravdivé a formule ψ je nepravdivá.

Metoda sémantických stromů

- Metoda pro řešení sémantických otázek.
- Ke každé konkrétní otázce můžeme zkonstruovat strom, ze kterého vyčteme odpověď.

Pravidla pro konjunktci a disjunktci

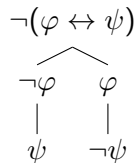
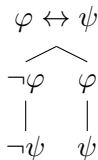
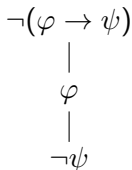
$$\begin{array}{c} \varphi \wedge \psi \\ | \\ \varphi \\ | \\ \psi \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \neg(\varphi \wedge \psi) \\ \wedge \\ \neg\varphi \quad \neg\psi \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \varphi \vee \psi \\ \wedge \\ \varphi \quad \psi \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \neg(\varphi \vee \psi) \\ | \\ \neg\varphi \\ | \\ \neg\psi \end{array}$$

Pravidla pro implikaci a ekvivalenci



Pravidlo pro negaci

$$\neg\neg\varphi$$
$$\mid$$
$$\varphi$$

Uzavřená větev

Větev daného stromu je uzavřená, když obsahuje nějaký atom spolu s jeho negací.

Je φ tautologie?

- Rozvíjíme strom pro formuli $\neg\varphi$.
- Pokud se strom uzavře na všech větvích, φ je tautologie.
- Pokud se na některé větvi neuzavře, φ není tautologie.

Je φ tautologie?

- Rozvíjíme strom pro formuli $\neg\varphi$.
- Pokud se strom uzavře na všech větvích, φ je tautologie.
- Pokud se na některé větvi neuzavře, φ není tautologie.

Je φ tautologie?

- Rozvíjíme strom pro formuli $\neg\varphi$.
- Pokud se strom uzavře na všech větvích, φ je tautologie.
- Pokud se na některé větvi neuzavře, φ není tautologie.

Je φ tautologie?

- Rozvíjíme strom pro formuli $\neg\varphi$.
- Pokud se strom uzavře na všech větvích, φ je tautologie.
- Pokud se na některé větvi neuzavře, φ není tautologie.

Je φ kontradikce?

- Rozvíjíme strom pro formuli φ .
- Pokud se strom uzavře na všech větvích, φ je kontradikce.
- Pokud se strom na některé větvi neuzavře, φ není kontradikce.

Je φ kontradikce?

- Rozvíjíme strom pro formuli φ .
- Pokud se strom uzavře na všech větvích, φ je kontradikce.
- Pokud se strom na některé větvi neuzavře, φ není kontradikce.

Je φ kontradikce?

- Rozvíjíme strom pro formuli φ .
- Pokud se strom uzavře na všech větvích, φ je kontradikce.
- Pokud se strom na některé větvi neuzavře, φ není kontradikce.

Je φ kontradikce?

- Rozvíjíme strom pro formuli φ .
- Pokud se strom uzavře na všech větvích, φ je kontradikce.
- Pokud se strom na některé větvi neuzavře, φ není kontradikce.

Je φ splnitelná?

- Rozvíjíme strom pro formuli φ .
- Pokud se strom uzavře na všech větvích, φ není splnitelná.
- Pokud se strom na některé větvi neuzavře, φ je splnitelná.

Je φ splnitelná?

- Rozvíjíme strom pro formuli φ .
- Pokud se strom uzavře na všech větvích, φ není splnitelná.
- Pokud se strom na některé větvi neuzavře, φ je splnitelná.

Je φ splnitelná?

- Rozvíjíme strom pro formuli φ .
- Pokud se strom uzavře na všech větvích, φ není splnitelná.
- Pokud se strom na některé větvi neuzavře, φ je splnitelná.

Je φ splnitelná?

- Rozvíjíme strom pro formuli φ .
- Pokud se strom uzavře na všech větvích, φ není splnitelná.
- Pokud se strom na některé větvi neuzavře, φ je splnitelná.

Je množina $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ splnitelná?

- Rozvíjíme strom pro formule $\varphi_1, \dots, \varphi_n$.
- Pokud se strom uzavře na všech větvích, $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ není splnitelná.
- Pokud se strom na některé větvi neuzavře, $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ je splnitelná.

Je množina $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ splnitelná?

- Rozvíjíme strom pro formule $\varphi_1, \dots, \varphi_n$.
- Pokud se strom uzavře na všech větvích, $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ není splnitelná.
- Pokud se strom na některé větvi neuzavře, $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ je splnitelná.

Je množina $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ splnitelná?

- Rozvíjíme strom pro formule $\varphi_1, \dots, \varphi_n$.
- Pokud se strom uzavře na všech větvích, $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ není splnitelná.
- Pokud se strom na některé větvi neuzavře, $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ je splnitelná.

Je množina $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ splnitelná?

- Rozvíjíme strom pro formule $\varphi_1, \dots, \varphi_n$.
- Pokud se strom uzavře na všech větvích, $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ není splnitelná.
- Pokud se strom na některé větvi neuzavře, $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ je splnitelná.

Vyplývá ψ z $\varphi_1, \dots, \varphi_n$?

- Rozvíjíme strom pro formule $\varphi_1, \dots, \varphi_n, \neg\psi$.
- Pokud se strom uzavře na všech větvích, ψ vyplývá z $\varphi_1, \dots, \varphi_n$.
- Pokud se strom na některé větvi neuzavře, ψ nevyplývá z $\varphi_1, \dots, \varphi_n$.

Vyplývá ψ z $\varphi_1, \dots, \varphi_n$?

- Rozvíjíme strom pro formule $\varphi_1, \dots, \varphi_n, \neg\psi$.
- Pokud se strom uzavře na všech větvích, ψ vyplývá z $\varphi_1, \dots, \varphi_n$.
- Pokud se strom na některé větvi neuzavře, ψ nevyplývá z $\varphi_1, \dots, \varphi_n$.

Vyplývá ψ z $\varphi_1, \dots, \varphi_n$?

- Rozvíjíme strom pro formule $\varphi_1, \dots, \varphi_n, \neg\psi$.
- Pokud se strom uzavře na všech větvích, ψ vyplývá z $\varphi_1, \dots, \varphi_n$.
- Pokud se strom na některé větvi neuzavře, ψ nevyplývá z $\varphi_1, \dots, \varphi_n$.

Vyplývá ψ z $\varphi_1, \dots, \varphi_n$?

- Rozvíjíme strom pro formule $\varphi_1, \dots, \varphi_n, \neg\psi$.
- Pokud se strom uzavře na všech větvích, ψ vyplývá z $\varphi_1, \dots, \varphi_n$.
- Pokud se strom na některé větvi neuzavře, ψ nevyplývá z $\varphi_1, \dots, \varphi_n$.

Jsou φ, ψ logicky ekvivalentní?

- Rozvíjíme strom pro formuli $\neg(\varphi \leftrightarrow \psi)$.
- Pokud se strom uzavře na všech větvích, φ, ψ jsou logicky ekvivalentní.
- Pokud se strom na některé větvi neuzavře, φ, ψ nejsou logicky ekvivalentní.

Jsou φ, ψ logicky ekvivalentní?

- Rozvíjíme strom pro formuli $\neg(\varphi \leftrightarrow \psi)$.
- Pokud se strom uzavře na všech větvích, φ, ψ jsou logicky ekvivalentní.
- Pokud se strom na některé větvi neuzavře, φ, ψ nejsou logicky ekvivalentní.

Jsou φ, ψ logicky ekvivalentní?

- Rozvíjíme strom pro formuli $\neg(\varphi \leftrightarrow \psi)$.
- Pokud se strom uzavře na všech větvích, φ, ψ jsou logicky ekvivalentní.
- Pokud se strom na některé větvi neuzavře, φ, ψ nejsou logicky ekvivalentní.

Jsou φ, ψ logicky ekvivalentní?

- Rozvíjíme strom pro formuli $\neg(\varphi \leftrightarrow \psi)$.
- Pokud se strom uzavře na všech větvích, φ, ψ jsou logicky ekvivalentní.
- Pokud se strom na některé větvi neuzavře, φ, ψ nejsou logicky ekvivalentní.

Úplnost a korektnost metody sémantických stromů (formulovaná pro pojem vyplývání)

Věta o korektnosti: Jestliže se úplně rozvinutý strom pro formule $\varphi_1, \dots, \varphi_n, \neg\psi$ uzavře na všech větvích, pak $\varphi_1, \dots, \varphi_n \models \psi$.

Věta o úplnosti: Jestliže $\varphi_1, \dots, \varphi_n \models \psi$, pak se úplně rozvinutý strom pro formule $\varphi_1, \dots, \varphi_n, \neg\psi$ uzavře na všech větvích.

Úplnost a korektnost metody sémantických stromů (formulovaná pro pojem vyplývání)

Věta o korektnosti: Jestliže se úplně rozvinutý strom pro formule $\varphi_1, \dots, \varphi_n, \neg\psi$ uzavře na všech větvích, pak $\varphi_1, \dots, \varphi_n \models \psi$.

Věta o úplnosti: Jestliže $\varphi_1, \dots, \varphi_n \models \psi$, pak se úplně rozvinutý strom pro formule $\varphi_1, \dots, \varphi_n, \neg\psi$ uzavře na všech větvích.

Úplnost a korektnost metody sémantických stromů (formulovaná pro pojem vyplývání)

Věta o korektnosti: Jestliže se úplně rozvinutý strom pro formule $\varphi_1, \dots, \varphi_n, \neg\psi$ uzavře na všech větvích, pak $\varphi_1, \dots, \varphi_n \models \psi$.

Věta o úplnosti: Jestliže $\varphi_1, \dots, \varphi_n \models \psi$, pak se úplně rozvinutý strom pro formule $\varphi_1, \dots, \varphi_n, \neg\psi$ uzavře na všech větvích.